

DS de mathématiques n°6

Structures algébriques, calcul matriciel,

fonctions – **Corrigé**

Noté sur 65 pts $\pm 2,5$ pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramenée sur 20 en multipliant par $2/5$.

1 Calcul d'une puissance n -ième de matrice

/18

Dans cet exercice, on notera $0_{3,3}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) On pose $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\tilde{P}P$. En déduire que P est

/1,5 inversible et préciser P^{-1} .

$$\begin{aligned} \tilde{P}P &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3 \end{aligned}$$

et donc $\left(\frac{1}{3}\tilde{P}\right)P = I_3$. Donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}\tilde{P} =$

$$\boxed{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

/1 2) Calculer $P^{-1}JP$.

On a

$$\begin{aligned} P^{-1}JP &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

/3 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer J^n en fonction de n et de J . On pourra éventuellement utiliser la question précédente.

D'une part,

$$\begin{aligned} (P^{-1}JP)^n &= \underbrace{(P^{-1}JP)(P^{-1}JP)\dots(P^{-1}JP)}_{n \text{ fois}} \\ &= P^{-1}J^nP \end{aligned}$$

et d'autre part, comme $P^{-1}JP$ est diagonale, on a

$$(P^{-1}JP)^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = 3^{n-1}P^{-1}JP$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} P^{-1}J^nP &= 3^{n-1}P^{-1}JP \\ \implies J^n &= \boxed{3^{n-1}J} \end{aligned}$$

/0,5 4) Calculer N^2 .

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

/1 5) Exprimer A en fonction de N et J .

On remarque que

$$A - 3J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$$

$$\text{donc } A = \boxed{3J + N}$$

/4 6) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer A^n en fonction de n .

On vérifie que

$$JN = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3,3}$$

$$NJ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_{3,3}$$

et donc $NJ = JN$. Par la formule du binôme, on en déduit que :

$$\begin{aligned} A^n &= (3J + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k (3J)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} N^k (3J)^{n-k} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} N^k (3J)^{n-k} \\ &= N^0 (3J)^n + nN(3J)^{n-1} + 0 \quad \text{car } N^2 = 0_{3,3} \\ &= 3^n J^n + n3^{n-1} J^{n-1} \end{aligned}$$

— Si $n \geq 2$, alors $NJ^{n-1} = 3^{n-2}NJ = 0_{3,3}$ par ce qui précède, donc :

$$\begin{aligned} A^n &= 3^n J^n \\ &= 3^n 3^{n-1} J \\ &= 3^{2n-1} J \end{aligned}$$

— Si $n = 1$, alors $A^n = A$.

On trouve donc :

$$A^n = \begin{cases} 3^{2n-1} J & \text{si } n \geq 2 \\ A & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

/7

7) **Bonus un peu corsé** : Existe-t-il une matrice $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}NQ$ soit diagonale ?

Supposons par l'absurde qu'une telle matrice Q existe. On pose alors $D = Q^{-1}NQ$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} D^2 &= (Q^{-1}NQ) (Q^{-1}NQ) \\ &= Q^{-1}N^2Q \\ &= Q^{-1}0_{3,3}Q \\ &= 0_{3,3} \end{aligned}$$

En posant $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a donc

$$D^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} = 0_{3,3}$$

On en déduit que $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 0$, donc que $\alpha = \beta = \gamma$. Ainsi, nécessairement, $D = 0_{3,3}$. Mais dans ce cas,

$$\begin{aligned} Q^{-1}NQ &= 0_{3,3} \\ \implies N &= Q0_{3,3}Q^{-1} \\ \implies N &= 0_{3,3} \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Ainsi, $Q^{-1}NQ$ n'est pas diagonale.

2 Une généralisation d'un théorème classique

/12

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Soit $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$.

1) Soit $p, q, r \in \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in I \quad g(x) = f(x) - p(x-b)(x-c) - q(x-a)(x-c) - r(x-a)(x-b)$$

Déterminer les réels p, q, r de sorte que g s'annule en a, b et c . Dans la suite, p, q, r gardent ces valeurs.

/2

On a :

$$g(a) = 0 \iff f(a) - p(a-b)(a-c) = 0$$

donc cela impose que $p = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}$ (car $a \neq b$ et $a \neq c$). De même on trouve que

$$q = \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} \quad r = \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

2) En déduire qu'il existe $\alpha, \beta \in]a, c[$ avec $\alpha < \beta$ tels que $g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$.

/2

La fonction g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ par somme de telles fonctions. De plus $g(a) = g(b)$ par ce qui précède, donc par le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que $g'(\alpha) = 0$.

De même, il existe $\beta \in]b, c[$ tel que $g'(\beta) = 0$. En particulier, $\alpha < b < \beta$ donc on a bien $\alpha < \beta$.

3) En déduire qu'il existe $\gamma \in I$ tel que :

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2}f''(\gamma)$$

On admet que cette propriété est encore vérifiée pour tous points $a, b, c \in I$ distincts, sans l'hypothèse $a < b < c$.

/4

La fonction g est deux fois dérivable par somme de telles fonctions, donc g' est continue sur $[\alpha, \beta]$, dérivable sur $] \alpha, \beta [$ et vérifie $g'(\alpha) = g'(\beta)$ par ce qui précède. Ainsi, il existe $\gamma \in] \alpha, \beta [$ (donc $\gamma \in I$) tel que

$$g''(\gamma) = 0$$

Or, en développant les polynômes dans $g(x)$, on constate qu'il existe un polynôme P de degré au plus 1 tel que

$$g(x) = f(x) + (p + q + r)x^2 + P(x)$$

de sorte que

$$g''(x) = f''(x) + 2(p + q + r) + 0$$

En particulier, comme $g''(\gamma) = 0$, on a :

$$p + q + r = -\frac{1}{2}f''(\gamma) \\ \implies \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = -\frac{1}{2}f''(\gamma)$$

4) Soit $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{\sin x}{x}$. Montrer que h se prolonge par continuité en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, qu'on notera encore h .

/1

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^*$ par quotient de telles fonctions. De plus,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sin'(0) = 1$$

de sorte que h est prolongeable par continuité en posant $h(0) = 1$

5) En appliquant la question 3) à $f = \sin$ et $c = 0$, montrer que h est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne.

/3

On applique le résultat de la question 3) à $f = \sin$ et $c = 0$, ce qui est possible car $\sin$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc deux fois dérivable) : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$, $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\sin a}{a(a-b)} + \frac{\sin b}{b(b-a)} + 0 &= -\frac{1}{2}\sin(\gamma) \\ \iff \frac{h(a)}{a-b} + \frac{h(b)}{b-a} &= -\frac{1}{2}\sin(\gamma) \\ \iff \frac{h(b) - h(a)}{b-a} &= -\frac{1}{2}\sin(\gamma) \\ \iff h(b) - h(a) &= -\frac{1}{2}\sin(\gamma) \times (b-a) \end{aligned}$$

et donc

$$|h(b) - h(a)| = \frac{1}{2}|\sin \gamma| \times |b-a| \leq \frac{1}{2}|b-a|$$

Cette relation est également trivialement vraie si $a = b$, si $a = 0$ ou si $b = 0$. Ainsi, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$|h(b) - h(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a|$$

donc h est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne.

/35 3 Idéal d'un anneau

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. On note 0 l'élément neutre de A pour l'addition, et 1 l'élément neutre de A pour la multiplication.

Soit $I \subset A$. On dit que I est un *idéal* de A si :

I est un sous-groupe de $(A, +)$ et $\forall a \in A \quad \forall x \in I \quad a \times x \in I$

/3 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.

Montrons que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

- $0 \in n\mathbb{Z}$ car $0 = n \times 0$
- Soit $a, b \in n\mathbb{Z}$. Montrons que $a - b \in n\mathbb{Z}$. Comme $a, b \in n\mathbb{Z}$, il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = nk$ et $b = nk'$. Ainsi, $a - b = n(k - k') \in n\mathbb{Z}$ car $k - k' \in \mathbb{Z}$.

D'où $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

Montrons que $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in n\mathbb{Z} \quad ax \in n\mathbb{Z}$. Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $x \in n\mathbb{Z}$. On peut écrire $x = nk$ avec $k \in \mathbb{Z}$, de sorte que

$$ax = ank = n \times (ak) \in n\mathbb{Z} \quad \text{car } ak \in \mathbb{Z}$$

Ainsi, $n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.

2) On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble défini par $\mathbb{Z}[i] = \{n + ip \mid (n, p) \in \mathbb{Z}^2\}$, où i est le nombre complexe usuel.

/3,5 a) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif.

Montrons que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

- On a $1 = 1 + i \times 0$ donc $1 \in \mathbb{Z}[i]$.
- Soit $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ montrons que $a - b \in \mathbb{Z}[i]$. On pose $a = n + ip$ et $b = n' + ip'$ avec $n, n', p, p' \in \mathbb{Z}$. On a donc

$$a - b = \underbrace{(n - n')}_{\in \mathbb{Z}} + i \underbrace{(p - p')}_{\in \mathbb{Z}}$$

donc $a - b \in \mathbb{Z}[i]$.

- Montrons que $ab \in \mathbb{Z}[i]$. Avec les mêmes notations,

$$\begin{aligned} ab &= (n + ip)(n' + ip') \\ &= \underbrace{nn' - pp'}_{\in \mathbb{Z}} + i \underbrace{(np' + pn')}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

donc $ab \in \mathbb{Z}[i]$.

Finalement, $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ donc un anneau commutatif, car $\mathbb{C}$ est commutatif. (On peut aussi le montrer rapidement : on a $ab = ba$ car $a, b \in \mathbb{C}$)

/4

b) Soit J un idéal de $\mathbb{Z}[i]$. On suppose que $1 \in J$ et $i \in J$. Déterminer J .

Montrons que $J = \mathbb{Z}[i]$. Comme J est un idéal de $\mathbb{Z}[i]$, on a $J \subset \mathbb{Z}[i]$ par définition. Réciproquement, montrons que $\mathbb{Z}[i] \subset J$. Soit $a \in \mathbb{Z}[i]$. Comme J est un idéal et $1 \in J$, alors on a $a \times 1 \in J$. On en déduit que $a \in J$, donc $\mathbb{Z}[i] \subset J$. Finalement $J = \mathbb{Z}[i]$.

Note : l'hypothèse $i \in J$ n'est pas nécessaire, mais elle permettrait d'arriver à la solution avec un peu moins d'astuce.

/5

3) Donner un exemple de deux idéaux d'un anneau dont la réunion n'est pas un idéal.

On pose $I = 3\mathbb{Z}$ et $J = 5\mathbb{Z}$, qui sont tous les deux des idéaux de $\mathbb{Z}$ d'après la question 1). On pose aussi

$$K = 3\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$$

On va montrer que K n'est pas un idéal de $\mathbb{Z}$. Supposons par l'absurde que ce soit le cas. Comme $3 \in K$, $5 \in K$ et comme $(K, +)$ est un groupe, on en déduit que

$$5 - 3 = 2 \in K$$

Or, $2 \notin 3\mathbb{Z}$ car $3 \nmid 2$ et $2 \notin 5\mathbb{Z}$ car $5 \nmid 2$. D'où $2 \notin K$. Contradiction. Finalement, K n'est pas un idéal de $\mathbb{Z}$.

4) Soit $x \in A$. On note $xA = \{xa \mid a \in A\}$. On admet que xA est un idéal de A : la preuve est similaire à celle de la question 1).

/0,5

a) Reconnaître les ensembles $0A$ et $1A$.

$$0A = \{0a \mid a \in A\} = \boxed{\{0\}}$$

$$1A = \{1a \mid a \in A\} = \{a \mid a \in A\} = \boxed{A}$$

- b) Montrer que si A n'est pas un corps et si $A \neq \{0\}$, alors il existe un idéal I de A non trivial, c'est-à-dire tel que $I \neq \{0\}$ et $I \neq A$.

/4

Supposons par l'absurde que tout élément non nul de A soit inversible. On sait que $A \neq \{0\}$ et par hypothèse, A est commutatif. On en déduit que A est un corps, ce qui est absurde. Ainsi, il existe un élément non nul de A qui n'est pas inversible. On le note x . On pose ensuite

$$I = xA$$

On va montrer que $I \neq \{0\}$ et $I \neq A$.

- Comme $1 \in A$, on a $x \times 1 \in xA$, donc $x \in I$. Comme x est non nul, on en déduit que $I \neq \{0\}$.
- Supposons par l'absurde que $I = A$. Alors en particulier, $1 \in I$, i.e. $1 \in xA$. Donc il existerait un élément $a \in A$ tel que $1 = xa$. Cela impliquerait que x soit inversible, ce qui est absurde. On en déduit que $I \neq A$.

Indication : on pourra s'intéresser, en justifiant son existence, à un élément non nul et non inversible de A .

- 5) Supposons désormais que A soit un corps. Soit I un idéal de A .

/3

- a) Montrer que si $I \neq \{0\}$ alors $1 \in I$.

Comme $I \neq \{0\}$, I contient un élément non nul qu'on note x . Comme I est un idéal, pour tout $a \in A$, on a $ax \in I$. En prenant $a = x^{-1}$, on en déduit que $1 \in I$.

/4

- b) En déduire tous les idéaux du corps A .

On raisonne par analyse-synthèse.

- Soit I un idéal de A .
 - Si $I = \{0\}$, alors $I = 0A$.
 - Si $I \neq \{0\}$, alors par la question précédente, $1 \in I$ et que I est un idéal, pour tout $a \in A$, on a $a \times 1 \in I$, donc $a \in I$. Dans ce cas, on a donc $I = A = 1A$.
- On a vu en question a) que $0A$ et $1A$ sont bien des idéaux de A .

Finalement, les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ et A .

/8

- 6) Soit I un idéal de $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I = n\mathbb{Z}$.

Si $I = \{0\}$, qui est bien un idéal de $\mathbb{Z}$, alors $I = n\mathbb{Z}$ avec $n = 0$.

Si $I \neq \{0\}$, alors il existe un élément non nul $x \in I$. Comme I est un idéal, on a aussi $(-1) \times x = -x \in I$. En particulier, I contient au moins un élément strictement positif. Ainsi, l'ensemble $I \cap \mathbb{N}^*$ est non vide, minoré et inclus dans $\mathbb{Z}$. On peut donc poser :

$$n = \min(I \cap \mathbb{N}^*)$$

On va montrer que $I = n\mathbb{Z}$.

- Montrons que $n\mathbb{Z} \subset I$. Soit $x \in n\mathbb{Z}$. On peut poser $x = an$ avec $a \in \mathbb{Z}$. Comme $n \in I$, on a $a \times n = I$, donc $x \in I$. On en déduit que $n\mathbb{Z} \subset I$.
- Montrons que $I \subset n\mathbb{Z}$. Soit $x \in I$. Montrons que $x \in n\mathbb{Z}$, i.e. que n divise x . La division euclidienne de x par n donne $x = nq + r$ avec $0 \leq r < n$. Supposons par l'absurde que $n \nmid x$, i.e. que $r \neq 0$. Comme $n \in I$ et $q \in \mathbb{Z}$, on a $nq \in I$. On en déduit que $nq \in I$. Comme $x \in I$ et que $(I, +)$ est un groupe, on a

$$r = x - nq \in I$$

Ainsi, $r \in I \cap \mathbb{N}^*$ et $r < n$. C'est absurde, car $n = \min(I \cap \mathbb{N}^*)$. Finalement, $x \in n\mathbb{Z}$. Par arbitraire sur x , on a donc $x \in n\mathbb{Z}$.